Totální diferenciál – další příklady jeho výpočtu a užití :

1. Je dána funkce a) $f(x,y)=\sqrt{x^3+y}$; b) $f(x,y)=\arcsin\frac{y}{x+1}$.
   Najděte a načrtněte definiční obor funkce f, vypočítejte $\nabla f(x_0,y_0)$, ukažte, že funkce f má v bodě $[x_0,y_0]$ totální diferenciál a určete jej. Napište rovnici tečné roviny ke grafu f v bodě $[x_0,y_0,f(x_0,y_0)]$ a najděte normálu ke grafu f v tomto bodě.
   Vypočítejte přibližně (pomocí lineární aproximace) hodnotu $f(1{,}04;3{,}008)$ v příkladu a) a $f(-0.04;0{,}02)$ v příkladu b).

2. Jsou-li funkce $f,g:D\subseteq R^n\to R$, bod a je uvnitř D a funkce f,g mají v bodě a totální diferenciál, ukažte, že pak $d(fg)(a)=g(a)\cdot df(a)+f(a)\cdot dg(a)$
   (asi pomůže, když ukážete, že $\nabla(fg)(a)=g(a)\cdot\nabla f(a)+f(a)\cdot\nabla g(a)$).

3. Najděte „vzorec“ pro přibližné určení relativní chyby ($\frac{\Delta f}{f}$) výpočtu veličiny f, když

   a) $f(u,v)=uv$; b) $f(u,v)=\frac{u}{v}$.

   Zkuste určit relativní chybu (výpočtu) doby kmitu matematického kyvadla $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Derivace složené funkce více proměnných:

1. „Technika derivování – předpokládáme, že platí předpoklady pro užití „řetízkového“ pravidla (jaké to jsou předpoklady?)
   a) Je-li $g(t)=f(\sin t,t^2)$, určete $g'(t)$ a $g''(t)$ pro obecnou funkci f a pak pro $f(x,y)=x^y$.
   b) Určete $g'(x)$ a $g''(x)$, je-li $g(x)=F(x,\varphi(x))$.
   c) Určete parciální derivace 1.a 2. řádu funkce g, je-li

      (i) $g(x,y)=f(x^2y,\frac{x}{y})$; (ii) $g(x,y)=f(x^2+y^2,xy,\frac{y}{x})$; (iii) $g(x,y,z)=f(\frac{x}{y},\frac{y}{z})$
   d) Určete parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $g(x,y)=F(x,y,\varphi(x,y))$.

a užití :

2. Najděte funkci $f(x,y)$, která splňuje parciální diferenciální rovnici $x\cdot\frac{\partial f}{\partial y}-y\cdot\frac{\partial f}{\partial x}=0$ pomocí transformace rovnice do polárních souřadnic $x=r\cos\varphi,\ x=r\sin\varphi$, $r\in(0,\infty)$, $\varphi\in[0,2\pi]$.

3. Najděte řešení $u(t,x)$ pro $t\geq 0$ a $x\in R$ vlnové rovnice $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ ($a>0$), které splňuje počáteční podmínky $u(0,x)=\varphi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0,x)=\psi(x)$ pro $x\in R$, pomocí transformace $\xi=x-at$, $\eta=x+at$.